ПРИМЕР РАСЧЁТА НЕОПРЕДЕЛЁННОСТИ

Данный пример переведён из документа ISO 98-3:2008, изменён и дополнен дополнительной теоретической информацией для лучшего понимания. Норма ISO 98-3 описывает расчёт неопределённости, на русский язык стандарт переведён в документе ГОСТ 54500.3

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Длина калибруемой детали номинальной длины 50мм определяется сравнением с другим образцом, заранее известной длины. Сравнивая два образца, мы получаем разницу длин, которая выражается формулой:

(1) $d = l(1 + \alpha\theta) - l_s(1 + \alpha_s\theta_s)$

- l - длина калибруемой детали при температуре 20 °C
- l_s - длина образца при температуре 20 °C, обозначенная в соответствующей документации
- α, α_s - коэффициенты теплового расширения детали и образца
- θ, θ_s - среднеквадратичное отклонение замера при температуре 20 °C

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ИНФОРМАЦИЯ К УСЛОВИЮ ЗАДАЧИ

На основе 25 независимых измерений с помощью используемого инструмента, было определено экспериментальное среднеквадратичное отклонение равное 13 нм. Значение эффиктивного числа степеней свободы равно 18. Сертификат калибровки измерительного инструмента для сравнения двух длин указывает, что основываясь на шести измерениях, неопределённость из-за случайных ошибок равна ±0,01 мкм с уровнем доверия 95%, неопределённость при систематических ошибках равна 0,02 мкм на уровне трёх среднеквадратичных отклонений (достоверность 25%). Коэффициент теплового расширения образца: $\alpha_s = 11,5 \times 10^{-6}$ °C^{-1}, неопределённость задана квадратным распределением с границами $\pm 2 \times 10^{-6}$ °C^{-1}. Температура в измерительной камере (19,9 ± 0,5) °C. Разница температур детали и образца находится в интервале ±0,05 °C.

МОДЕЛЬ ИЗМЕРЕНИЯ

$$(2)\ l = [l_s(1 + \alpha_s\theta_s) + d] / (1 + \alpha\theta) = l_s + d + l_s(\alpha_s\theta_s - \alpha\theta) + \ldots$$

Если мы будем использовать температуру образца и температуру детали в модели измерения, то необходимо будет учесть корреляцию между данными величинами. Что бы избежать усложнений, введём разницу температур детали и образца: $\delta\theta = \theta - \theta_s$ и введём предположение, что θ и δθ не коррелируют друг с другом. То же для разницы коэффициентов расширения $\delta\alpha = \alpha - \alpha_s$

Предположим, что $\delta\theta$ и $\delta\alpha$ равны нулю, но не равны нулю соответствующие неопределённости.

$$(3)\ l = f(l_s,d,\alpha_s,\theta,\delta\alpha,\delta\theta) = l_s + d - l_s[\delta\alpha\cdot\theta + \alpha_s\cdot\delta\theta]$$

Из уравнения (3) следует, что статистическая оценка длины детали, l, может быть получена из простого уравнения $l_s + d_\mu$, где l_s - обозначенная в документации длина образца при 20°C, d_μ - статистическая оценка среднего, полученная расчётом среднего арифметического пяти (n=5) независимых измерений.

СУММАРНАЯ НЕОПРЕДЕЛЁННОСТЬ

Согласно формуле суммарной определённости, неопределённость из формулы модели измерения (3):

$$(4)\ u^2_c(l) = c^2_s\cdot u^2_c(l_s) + c^2_d\cdot u^2_c(l_d) + c^2_{\alpha s}\cdot u^2_c(\alpha_s) + c^2_\theta\cdot u^2_c(\theta) + c^2_{\delta\alpha}\cdot u^2_c(\delta\alpha) + c^2_{\delta\theta}\cdot u^2_c(\delta\theta)$$

где

$$c_s = \partial f/\partial l_s = 1 - (\delta\alpha\cdot\theta + \alpha_s\cdot\delta\theta) = 1$$

$$c_d = \partial f/\partial d = 1$$

$$c_{\alpha s} = \partial f/\partial\alpha_s = -l_s\delta\theta = 0$$

$$c_\theta = \partial f/\partial\theta = -l_s\delta\alpha = 0$$

$$c_{\delta\alpha} = \partial f/\partial\delta\alpha = -l_s\theta$$

$$c_{\delta\theta} = \partial f/\partial\delta\theta = -l_s\alpha$$

Откуда следует:

$$(5)\ u^2_c(l) = u^2(l_s) + u^2(d) + l^2_s\theta^2u^2(\delta\alpha) + l^2_s\alpha^2_s u^2(\delta\theta)$$

НЕОПРЕДЕЛЁННОСТЬ ОБРАЗЦА *$U(L_s)$*

В документации к образцу обозначена расширенная неопределённость U = 0,075 мкм с коэффициентом перекрытия k=3. Следовательно:

$u(l_s)$ = (0,075 мкм) / 3 = 25 нм

НЕОПРЕДЕЛЁННОСТЬ РАЗНИЦЫ ДЛИН *$U(D)$*

Экспериментальное среднеквадратичное отклонение сравнения разницы длин l и l_s основано на результате 25 независимых измерений и оно равно 13 нм. В данном примере мы произвели 5 замеров, откуда стандартная неопределённость среднего значения данных измерений равна:

$u(d_\mu) = s(d_\mu)$ = (13 нм)/√5 = 5,8 нм

Неопределённость случайной ошибки измерительного инструмента, согласно распределению Стьюдента со стпенью свободы ν = 6 - 1 = 5, при коэффициенте перекрытия $k = t_{95}(5)$ = 2,57:

$u(d_1)$ = (0,01мкм) / 2,57 = 3,9 нм

Неопределённость систематической ошибки измерительного инструмента:

$u(_{d2})$ = (0,02 мкм) / 3 = 6,7 нм

Суммарная неопределённость:

$u^2(d) = u^2(d_\mu) + u^2(d_1) + u^2(d_2)$ = 93 нм^2
$u(d)$ = 9,7 нм

НЕОПРЕДЕЛЁННОСТЬ КОЭФФИЦИЕНТА ТЕПЛОВОГО РАСШИРЕНИЯ *$U(A_s)$*

$u(\alpha_s) = (2 \times 10^{-6}\ °C^{-1}) / \sqrt{3} = 1{,}2 \times 10^{-6}\ °C^{-1}$

НЕОПРЕДЕЛЁННОСТЬ ТЕПЛОВОГО РАСШИРЕНИЯ ОБРАЗЦА *U(Θ)*

Максимальное отклонение температуры в процессе замера, Δ = 0,5°C. Предположим, что температура изменяется в заданных пределах по циклическому закону, по синусоиде, тогда:

$\sigma_t = \sqrt{[\int(t-t_\mu)^2 \sin(t)\mathrm{d}t]} = \sqrt{2}$
$u(\Delta) = (0{,}5\ °C) / \sqrt{2} = 0{,}35\ °C$

Неопределённость средней температуры в измерительной камере следует из среднекватратичного отклонения среднего значения:

$\theta_\mu = 19{,}9°C - 20°C = -0{,}1\ °C$
$u(\theta_\mu) = \pm(-0{,}1\ °C) = 0{,}2\ °C.$

Среднекватратичное отклонение θ может быть взята как среднеквадратичное отклонение среднего значения θ_μ, откуда следует неопределённость:

$u^2(\theta) = u^2(\theta_\mu) + u^2(\Delta) = 0{,}165\ °C^2$
$u(\theta) = 0{,}41\ °C$

НЕОПРЕДЕЛЁННОСТЬ РАЗНИЦЫ КОЭФФИЦИЕНТОВ ТЕПЛОВОГО РАСШИРЕНИЯ *U(ΔA)*

Статистическое ожидание $\delta\alpha$ равно $1 \times 10^{-6}\ °C^{-1}$ с равной вероятностью, что значение $\delta\alpha$ окажется в заданных пределах, откуда стандартная неопределённость:

$u(\delta\alpha) = (1 \times 10^{-6}\ °C^{-1}) / \sqrt{3} = 0{,}58 \times 10^{-6}\ °C^{-1}$

НЕОПРЕДЕЛЁННОСТЬ РАЗНИЦЫ ТЕМПЕРАТУР *U(ΔΘ)*

$u(\delta\theta) = (0{,}05\ °C) / \sqrt{3} = 0{,}029\ °C$

СТАНДАРТНАЯ СУММАРНАЯ НЕОПРЕДЕЛЁННОСТЬ $U_c(L)$

Суммарная неопределённость расчитаем по формуле (5):

$u_c^2(l)$ = (25 нм)^2 + (9,7 нм)^2 + (0,05 м)^2(-0,1 °C)^2(0,58 × 10^{-6} °C^{-1})^2 + (0,05 м)^2(11,5 × 10^{-6}°C^{-1})^2(0,029 °C)^2 = 1002 нм^2
$u_c(l)$ = 32 нм
Из расчётов видно, что основной вклад в неопределённость вносит неопределённость образца

Если модель измерения Y = f(X$_1$, X$_2$, …, X$_n$) имеет нелинейность на измеряемом участке, необходимо включить неопределённости старших порядков, тогда:

$u_c^2(l)$ = (25 нм)^2 + (9,7 нм)^2 + (0,05 м)^2(-0,1 °C)^2(0,58 × 10^{-6} °C^{-1})^2 + (0,05 м)^2(11,5 × 10^{-6}°C^{-1})^2(0,029 °C)^2 + (0,05 м)^2(0,58 × 10^{-6}°C^{-1})^2(0,41 °C)^2 + (0,05 м)^2(1,2 × 10^{-6}°C^{-1})^2 (0,029 °C)^2 + 1140 нм^2
$u_c(l)$ = 34 нм

РЕЗУЛЬТАТ ИЗМЕРЕНИЯ

Из сертификата образца имеем l_s = 50,000623 мм при 20°C. Среднее значение разницы длин в результате пяти независимых измерений равно 215 нм. Длина детали $l = l_s + d_\mu$ при 20 °C равна 50,000838 мм.

РАСЧЁТ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ НЕОПРЕДЕЛЁННОСТИ

Относительная неопределённость рассчитывается как отношение неопределённости к результату измерения. Результат измерения l = 50,000838 мм, при суммарной неопределённости u_c = 32 нм. Тогда относительная суммарная неопределённость равна u_c / l = 6,4 × 10^{-7}

РАСЧЁТ ЭФФЕКТИВНЫХ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

Расчёт эффективных степеней свободы производится по уравнению Welch–Satterthwaite:

$\nu_{eff} = u_c^4(y) / \Sigma^n_{i=1} u_i^4(y)/\nu_i$
Если $u(x_i)$ - неопределённость типа Б, то, как правило, число степеней свободы стремится к бесконечности, иначе число степеней свободы для n измерений

рассчитывается по следующему алгоритму: если статистическая оценка среднего рассчитывается по формуле среднего арифметического, то ν = n - 1, если статистическая оценка определяется методом наименьших квадратов с использованием m независимых факторов, то ν = n - m.

Число степеней свободы образца задано сертификатом калибровки, $\nu_{\mathrm{eff}}(l_s) = 18$.

Значение d_μ было получено основываясь на пяти измерениях, но значение неопределённости было получено основываясь на 25 измерениях, количество степеней свободы d_μ: $\nu(d_\mu) = 25 - 1 = 24$. Число степеней свободы d_1: $\nu(d_1) = 6 - 1 = 5$. Число степеней свободы для $\nu(d_2) = 8$. Откуда число степеней свободы $\nu_{eff}(d) = 25{,}6$. Для расчёта неопределённости разницы коэффициентов расширения зададимся уровнем значимости 10%, в таком случае $u(\delta\alpha) = 50$. Для расчёта неопределённости разницы температур зададимся уровнем значимости 50%, тогда $u(\delta\theta) = 2$.

$$\nu_{eff}(l) = (32\ \text{нм})^4/[(25\ \text{нм})^4/18 + (9{,}7\ \text{нм})^4/25{,}6 + (2{,}9\ \text{нм})^4/50 + (16{,}6\ \text{нм})^4/2] = 16{,}7$$

$u_i(x)$	**Источник неопределённости**	**Значение неопределённости**	$c_i \equiv \partial f/\partial x_i$	$u_i(l) \equiv \lvert c_i \rvert u(x_i)$ **(нм)**	**Число степеней свободы**
$u(ls)$	Калибровка образца	25 нм	1	25	18
$u(d)$	Измерение разницы длин детали и образца	9,7 нм	1	9,7	25,6
$u(d_\mu)$	Независимые измерения	5,8 нм			24
$u(d_1)$	Случайные ошибки	3,9 нм			5
$u(d_2)$	Систематические ошибки	6,7 нм			8
$u(\alpha_s)$	Коэффициент теплового расширения образца	$1{,}2 \times 10^{-6}$ °C^{-1}	0	0	
$u(\theta)$	Температура измерительной камеры	0,41 °C^{-1}	0	0	
$u(\theta_\mu)$	Средняя температура измерительной камеры	0,2 °C			
$u(\Delta)$	Циклическое изменение температуры в измерительной камере	0,35 °C			

$u_i(x)$	**Источник неопределённости**	**Значение неопределённости**	$c_i \equiv \partial f / \partial x_i$	$u_i(l) \equiv \lvert c_i \rvert u(x_i)$ **(нм)**	**Число степеней свободы**
$u(\delta\alpha)$	Разница коэффициентов расширения	$0{,}58 \times 10^{-6}$ °C^{-1}	$l_s\theta$	2,9	50
$u(\delta\theta)$	Разница коэффициентов расширения	0,029 °C	$-l_s\alpha_s$	16,6	2

$u_c^2(l) = \Sigma u_i^2(l) = 1002$ нм^2
$u_c(l) = 32$ нм
$\nu_{eff}(l) = 16$

Таблица 1. *Суммарная неопределённость и её составляющие*

РАСШИРЕННАЯ НЕОПРЕДЕЛЁННОСТЬ

Предположим, что необходимо получить расширенную неопределённость $U_{99} = k_{99}\ u_c(l)$ с доверительным интервалом приблизительно 99%. Эффективное значение степеней свободы стандартной суммарной неопределённости, равное 16,7 округляем исключительно в меньшую сторону. Значение распределения Стьюдента, согласно таблице, равно $t_{99}(16) = 2{,}92$, откуда $U_{99} = t_{99}(16)u_c(l) = 2{,}92 \times (32$ нм$) = 93$ нм.

$l = (50{,}000\ 838 \pm 0{,}000\ 093)$ мм, где погрешность вычислена как расширенная неопределённость $U = ku_c$. u_c - расширенная неопределённость с коэффициентом покрытия $k = 2{,}92$, который был определён из распределения Стьюдента для 16 степеней свободы и доверительным интервалом 99%. Соответствующая расширенная относительная неопределённость $U/l = 1{,}9 \times 10^{-6}$

УДК: *53.088* ***ГРНТИ:*** *90.03.03*
Автор статьи: *Телятников З.А.*
Дата написания статьи: *23.04.2017*
Адрес статьи в интернете: *http://k-tree.ru/articles/metrologiya/primer_rascheta_neopredelennosti*

Дата формирования документа: *23.05.2017 02:13*